

Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

30/9/2013

1. Si consideri l'operatore $A : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots\} = \{\alpha_2, -8\alpha_3, \alpha_1, \alpha_5, -8\alpha_6, \alpha_4, \dots\}$$

- Derivare A^\dagger . A è autoaggiunto?
- Esiste l'operatore inverso A^{-1} ? In caso affermativo, calcolarlo. In caso negativo, giustificare la risposta.
- Determinare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.

2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(kx)}{x^2 + 2x + 2}$$

3. Calcolare e riportare graficamente i seguenti numeri complessi

- $\log \frac{1-i\sqrt{3}}{3}$
- le radici cubiche di $(2 + i\sqrt{5})$

4. Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^{3z} - 3z - 1}{x^a(1-x)^b}$$

Stabilire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$

- la funzione appartiene a $\mathcal{L}^1(-\infty, 2)$
- la funzione appartiene a $\mathcal{L}^2(-\infty, 2)$

Esistono valori dei parametri per i quali $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$? Motivare la risposta.

5. Dato lo spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e su di esso la base di Hermite $\{e_n\}_{n=0,1,\dots}$ definita da

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

si consideri la funzione $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = (5x^3 + 5x + 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

- Su quali vettori della base di Hermite f ha componenti non nulle?
- Calcolare i coefficienti dello sviluppo di f sulla base di Hermite.